

# M | Limites

Matef\_LA; | Nociones básicas

Una creación original de @Mates\_la

*En análisis real y complejo, el concepto de límite es la clave de toque que formaliza la noción intuitiva de aproximación hacia un punto concreto de una sucesión o una función, a medida que los parámetros de esa sucesión o función se acercan a un determinado valor. En el análisis los conceptos de series convergentes, derivada e integral definida se fundamentan mediante el concepto de límite.*

## Indice

### Pagina I

- » Definición intuitiva de limite
- » Límites «directos»
- » Límite de un polinomio
- » Noción grafica de limite

### Pagina II

- » Propiedades de los limites

### Pagina III

- » Limites laterales
- » Limites infinitos
- » Noción grafica de limite

### Pagina IV

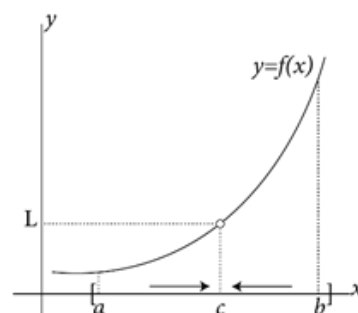
- » Definición  $\epsilon$ - $\delta$



## Definición intuitiva de límite

Imaginemos que existe una función  $f(x)$  que al evaluarla en valores muy cercanos a un número real  $c$  tanto *por la derecha como por la izquierda*, pero sin llegar a ser necesariamente  $c$ , se acerca de *manera arbitraria* a un único número  $L$ . Si esto ocurre decimos que el límite cuando  $x$  tiende a  $c$  de la función  $f(x)$  existe y su valor es  $L$ , se escribe así

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$



## Límites «directos»

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

Los límites «directos» mal llamado así por la mayoría de los estudiantes de cálculo diferencial y precálculo dado que la resolución de estos solo implica remplazar la variable  $x$  por el número  $c$  al que tiende.

En los Ejercicios 5-28, hallar el límite.

- |   |   |
|---|---|
| 5. $\lim_{x \rightarrow 4} x^2$                 | 6. $\lim_{x \rightarrow -3} (3x + 2)$                   |
| 7. $\lim_{x \rightarrow 0} (2x - 1)$            | 8. $\lim_{x \rightarrow 1} (-x^2 + 1)$                  |
| 9. $\lim_{x \rightarrow 2} (-x^2 + x - 2)$      | 10. $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^3 - 2x^2 + 4)$          |
| 11. $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x + 1}$       | 12. $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt[3]{x + 4}$            |
| 13. $\lim_{x \rightarrow -4} (x + 3)^2$         | 14. $\lim_{x \rightarrow 0} (2x - 1)^3$                 |
| 15. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x}$        | 16. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2}{x + 2}$           |
| 17. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 1}{x}$ | 18. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 1}}{x - 4}$ |
| 19. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \text{sen } x$  | 20. $\lim_{x \rightarrow \pi} \text{tg } x$             |

## Límite de un polinomio

$$\lim_{x \rightarrow c} p(x) = p(c)$$



### Ejercicios

- $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + x + 2$
- $\lim_{x \rightarrow 3} (x + 2)^2 (x^2 + 2x + 1)^2$
- $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 (3x + 2)$

## Noción grafica de límite

Para tratar de explicar este subtema de límites usaremos directamente un ejemplo.

### Ejemplo 1.1

Hallar el siguiente límite usando la noción grafica de límite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

## Solución

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Hacemos una tabla con los valores de  $x$  cercanos a 1 y observamos el comportamiento de la función

$x$	0.9	0.99	0.999	0.9999	1	1.00001	1.0001	1.001	1.01
$f(x)$	1.9	1.99	1.999	1.9999	?	2.00001	2.0001	2.001	2.01

Al resolverlo directamente obtenemos como resultado una indeterminación  $0/0$ . Analizamos la tabla observamos (usando la definición informal de límite) que mientras  $x$  tiende a 1  $f(x)$  se acerca de manera arbitraria a 2, con esto podemos concluir que el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a 1 es igual a 2

## Ejercicios

Con ayuda de tu calculadora calcula los siguientes límites. toma como guía/referencia el ejemplo 1.1

a.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$       b.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x + 1}$

c.  $\lim_{z \rightarrow 3} \frac{z - 3}{z^2 - 9}$       d.  $\lim_{t \rightarrow -1} \frac{t^3 + 1}{t + 1}$



## Propiedades de los límites

Múltiplo escalar/constante

$$\lim_{x \rightarrow c} [b(f(x))] = b \left[ \lim_{x \rightarrow c} f(x) \right]$$

Linealidad (suma/resta)

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

Producto de funciones

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)] = \left[ \lim_{x \rightarrow c} f(x) \right] \left[ \lim_{x \rightarrow c} g(x) \right]$$

Cociente de funciones

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}, \text{ solo si } \lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$$

Regla de la potencia (funciones)

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = \left[ \lim_{x \rightarrow c} f(x) \right]^n$$

Límite de un polinomio

$$\lim_{x \rightarrow c} p(x) = p(c)$$

Límite de una constante

$$\lim_{x \rightarrow c} b = b$$

Límites laterales

$$\lim_{x \rightarrow c^-} x = L \quad \lim_{x \rightarrow c^+} x = L$$

Regla de la potencia (variable)

$$\lim_{x \rightarrow c} x^n = c^n$$

## Limites laterales

Como ya vimos en la definición informal de límite un límite puede o no existir debido a que la función que estamos analizando toma valores distintos tanto por la derecha como por la izquierda de  $c$ . Con esto claro podemos decir que los límites laterales son los valores  $L$  a los que se acerca la función al ser evaluada a la izquierda o a la derecha de  $c$ . Por ejemplo, si hablamos del límite por la derecha estamos diciendo que  $x$  se aproximará a  $c$  con valores mayores que el mismo  $c$  y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow c^+} x = L$$

Podemos inferir que el límite por la izquierda significa que  $x$  se aproxima a  $c$  con valores  $c$  menores que  $c$  y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow c^-} x = L$$

## Limites infinitos

Analicemos el límite de la función  $f(x) = \frac{1}{x}$  cuando  $x \rightarrow 0$  tanto por la derecha como por la izquierda.

$x$	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	-10	-100	-1000	¿?	1000	100	10

Analizando a la tabla observamos que mientras  $x$  va tomando valores muy cercanos a 0 por la izquierda  $f(x)$  va tomando valores absurdamente pequeños es decir  $L=-\infty$ . Por otra parte, cuando  $x$  toma valores muy cercanos a 0 por la derecha  $f(x)$  va tomando valores absurdamente grandes es decir  $L=\infty$ . Dada esta situación podemos decir que:

Los límites laterales no coinciden, por lo tanto, establecemos que el  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$  no existe y presenta una discontinuidad infinita en 0.

Con esto claro ya podemos hacer una definición un poco forma de límites infinitos

Cuando afirmamos que

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$$

**Esto significa que  $f(x)$  crece sin tope alguno cuando  $x$  tiene a  $c$ .**

Cuando afirmamos que

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$$

**Esto significa que  $f(x)$  decrece arbitrariamente cuando  $x$  tiene a  $c$ .**

**Nota:** el signo igual no representa la existencia de un límite, por lo general cuando un límite da infinito se dice que es indeterminado o no existe, el signo igual solo nos aclara como falla la existencia del límite poniendo como prueba el comportamiento no cerrado de  $f(x)$ .



## Continuidad de una función

El término continuo toma el mismo sentido tanto en matemáticas como en la vida cotidiana. Cuando decimos una función  $f(x)$  es continua en  $x=c$  significa que su gráfica no es interrumpida, no se corta, no tiene algún salto o algún hueco en  $c$ .

Decimos que una función  $f(x)$  es continua en un punto  $c$  cuando se cumple que:

1.  $f(c)$  está definido
2.  $f(c)$  existe
3.  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

Ahora bien, decimos que una función  $f(x)$  es continua en un intervalo abierto  $(a, b)$  si lo es en todos los puntos de ese intervalo.

## Definición $\varepsilon$ - $\delta$

Presentamos con anterioridad la definición informal de límite diciendo que  $f(x)$  se acerca cuanto queramos a un número  $L$  cuando  $x$  tiende a  $c$  por ambos lados y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

A simple vista podríamos decir “¡Ey!, esta definición es muy formal” pero el principal problema de esta definición radica en dos frases

“ $f(x)$  se acerca cuanto queramos a un número  $L$ ” y “ $x$  tiende a  $c$ ” y claro se le debe dar una definición un tanto rigurosa. Para eso se estableció que:

$\varepsilon$  representa un número, tan pequeño como queramos que sea positivo. La frase “ $f(x)$  se acerca cuanto queramos a un número  $L$ ” significa que  $f(x)$  se encuentra dentro del intervalo  $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$  o escrito de otra forma.

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

Por otra parte, se interpreta la frase “ $x$  tiende a  $c$ ” como que existe un número  $\delta$  tal que  $x$  se encuentra en el intervalo  $(c - \delta, c + \delta)$  o en el intervalo  $(c - \delta, c + \delta)$ . Representándolo de otra forma más simple pero concisa con una doble igualdad

$$0 < |x - c| < \delta$$

En este último la primera parte de la desigualdad  $0 < |x - c|$  nos deja muy claro que  $x \neq c$  mientras que la segunda parte  $|x - c| < \delta$  dice que  $x$  se encuentra a una distancia  $c$  menor que  $\delta$ .

Entonces, podemos dar una definición formal y algo rigurosa de límite.

Tenemos una función  $f(x)$  definida en algún intervalo abierto  $(a, c)$  que contiene a  $c$  pero que tal vez no tiene definido a  $c$ .  $L$  es un número real. Entonces la afirmación que ya conocemos de

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

Significa que para cada  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - L| < \varepsilon$  siempre que  $0 < |x - c| < \delta$